

并车螺旋锥齿轮传动动力学参数 二维域界结构分析

林 何, 王三民, 董金城
(西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

摘 要: 构建了并车螺旋锥齿轮传动含间隙非线性动力学模型, 采用变步长 Gill 数值法对振动方程进行了求解。将胞映射法引入齿轮动力学全局性态域界分析中, 获得了动力学参数二维域界解结构。分别考虑了系统在齿侧间隙、综合误差、时变刚度以及阻尼比等参数域界结构中的稳态特性, 借助相图、Lyapunov 指数 (LE)、Poincaré 截面、快速傅里叶频谱分析 (FFT) 等手段研究了齿轮系统在多参数域共同激励下的动态分岔行为, 验证了胞映射法在齿轮动力学参数域设计中的准确性。结果表明: 当阻尼比 $\xi \in [0.025, 0.225]$ 时, 在间隙和综合误差激励下系统均通过倍周期分岔进入混沌; 较大阻尼比有助于系统处于稳态周期域中; 时变啮合刚度激励下, 系统在周期域和混沌域之间发生跃迁, 域界附近参数的微小波动将导致吸引子进入另一吸引域中。

关 键 词: 域界结构; 胞映射法; Lyapunov 指数; 分岔; 混沌

中图分类号: V233.1; TH113.1

文献标志码: A

Two-dimensional domain structure of dynamical parameters of combining spiral gear transmission

LIN He, WANG Sanmin, DONG Jincheng

(School of Mechanical Engineering,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The nonlinear dynamical model including piecewise backlash was created for combining spiral gear train, the governing equations of motion was solved by employing variant-step Gill's numerical algorithm. The cell-mapping technique was put forward to investigate the two dimensional basins of dynamic parameters. Parametric excitations covering the backlash, transmission error, time-varying mesh stiffness and damping ratio, were considered in basin planes in terms of steady solutions. The dynamical bifurcation behavior under the excitation of various parameters was performed by means of the phase portrait, Lyapunov exponent (LE), Poincaré section and fast Fourier transform (FFT). It is validated that Cell-mapping approach is effective in gear dynamic parameter design. The result shows that the system leads to chaos via period-doubling cascades under the backlash and transmission error while large damping ratio within the range $\xi \in [0.025, 0.225]$ is beneficial to periodic states of the system. Under the excitation of time-varying mesh stiffness, significant transition between periodic response and chaotic motion was exhibited, small changes nearby

收稿日期: 2015-11-17

基金项目: 国家高技术研究发展计划 (2009AA04Z404)

作者简介: 林何 (1985—), 男, 博士生, 主要从事齿轮非线性动力学的研究。

引用格式: 林何, 王三民, 董金城. 并车螺旋锥齿轮传动动力学参数二维域界结构分析[J]. 航空动力学报, 2017, 32(8): 2017-2024.
LIN He, WANG Sanmin, DONG Jincheng. Two-dimensional domain structures of dynamical parameters of combining spiral gear transmission[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(8): 2017-2024.

parametric domain boundary guided the attracter into another basin of attraction.

Key words: dynamical domain structure; cell-mapping technique; Lyapunov exponent (LE); bifurcation; chaos

并车齿轮传动属于冗余驱动的传动类型,其作用是将多路输入汇成一路输出,具有结构紧凑、稳定性好、可靠性高等特点,因而在航空和舰船等行业得到广泛应用,例如双发或多发直升机主减传动中普遍采用了并车传动结构。由于工作中受多种内、外部因素的激励,齿轮传动作为典型的非线性系统,其动态特性的好坏直接反映系统的整体性能,如何有效选取合适的动力学参数从而避开系统的不稳定区间关系着系统的振动稳定性和工作可靠性^[1-4]。为此,国内外学者进行了诸多有益的方法研究,Sun 等^[5]首先提出了胞映射(cell-mapping method)理论,将相空间状态域离散为一系列初始胞,用各胞的中心点值代替整个参数域中的相胞,借助 Poincaré 映射完成对非线性系统状态域的全局分析。唐进元等^[6]在广义胞映射(generalized cell-mapping)的基础上提出了图胞映射法,对单自由度的齿轮系统进行了求解,得到系统的吸引子、吸引域、不稳定解及吸引域边界等全局特性。刘宏等^[7]根据胞映射和庞加莱截面的思想,结合 Adomian 分解算法,针对航空弧齿锥齿轮进行了动力学参数域界结构分析,指出平面域界图可对齿轮的振动形态和振动参数设计提供主动控制。刘梦军等^[8]采用混合胞映射方法得到了齿轮在不同参数下的全局性态,根据吸引子吸引域的演化规律,提出了根据相空间初值的敏感度来判定系统的非线性行为。

由于齿侧间隙、传递误差、时变刚度等激励因

素易产生难以预测的动态行为,齿轮传动属于确定性复杂非线性动力系统^[9]。通常其全局特性存在多种周期吸引子共存及交错的现象,域界结构作为其动力学行为的构成,当激励参数域发生改变后,域界结构将随之变化或转移,对应着系统稳态响应的转变^[10-13]。针对不同周期形态及周期与混沌运动之间构成的域平面,本文在胞映射算法的基础上,求解了 12 自由度并车螺旋锥齿轮传动全局参数域结构,结合 Lyapunov 指数和位移分岔图验证了胞映射法在齿轮全局动力学参数域分析中的有效性。

1 动力学模型

图 1 为某直升机并车螺旋锥齿轮传动动力学模型,轴交角为 90°,齿轮 g_1 和 g_2 为动力输入端, g_3 为输出端。首先,针对每个齿轮单元分别建立局部坐标系 $O_i x_i y_i z_i (i=1,2,3)$; O_i 为各齿轮的几何中心; x_i, y_i, z_i 分别为齿轮的移动自由度; u_i 为扭转振动位移 $u_i = r_i \theta_i$; $r_i (i=1,2,3)$ 为锥齿轮的啮合点半径; θ_i 为扭转角度; J_i 为转动惯量; $b_n (n=1,2)$ 为齿侧间隙,啮合刚度和啮合阻尼分别为 $k_m^i(t), c_m^i$ 。因系统结构具有对称性,假定齿轮 1 和齿轮 2 在几何结构和物理属性上具有相同参数,各齿轮在移动自由度方向具有相同的支撑刚度和支撑阻尼,分别为 k_i^j 和 c_i^j ,其中 $j = \{x, y, z\}$ 。 T_0, T_1 分别为系统的输入、输出扭矩; γ_i 为节锥角。

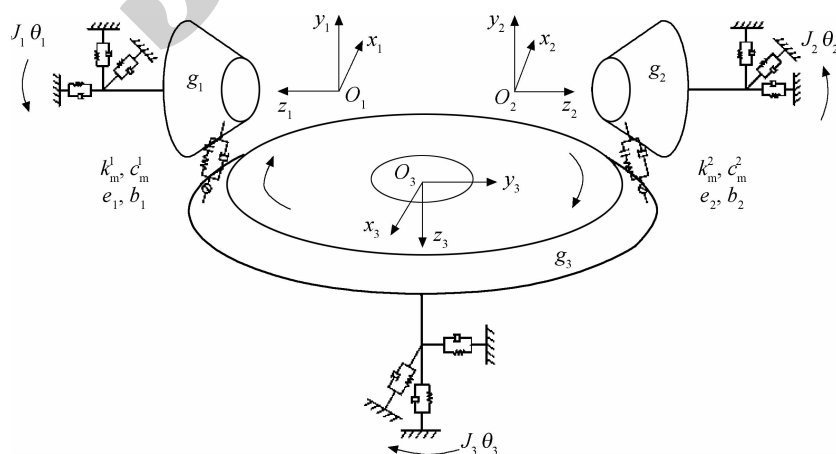


图 1 某直升机并车螺旋锥齿轮传动动力学模型

Fig. 1 Dynamical model of a helicopter combining spiral gear transmission

根据变形协调条件,各单元在自由度方向的相对变形位移为

$$\begin{cases} \mathbf{u}^1 = \{a_3 x_1 & -a_2 y_1 & -a_1 z_1 & a_3 r_1 \theta_1\}^T \\ \mathbf{u}^2 = \{-a_3 x_2 & -a_2 y_2 & -a_1 z_2 & a_3 r_2 \theta_2\}^T \\ \mathbf{u}_1^3 = \{a_3 x_3 & -a_5 y_3 & a_4 z_3 & -a_3 r_3 \theta_3\}^T \\ \mathbf{u}_2^3 = \{-a_3 x_3 & a_5 y_3 & a_4 z_3 & -a_3 r_3 \theta_3\}^T \end{cases} \quad (1)$$

式中矢量 $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ 分别为齿轮 1、齿轮 2 在各自自由度上的变形位移; $\mathbf{u}_1^3, \mathbf{u}_2^3$ 为齿轮 3 分别同齿轮 1、齿轮 2 的啮合变形位移。系数 $a_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 为

$$\begin{cases} a_1 = \sin \gamma_1 \sin \alpha_n + \cos \gamma_1 \sin \beta_1 \cos \alpha_n \\ a_2 = \cos \gamma_1 \sin \alpha_n - \sin \gamma_1 \sin \beta_1 \cos \alpha_n \\ a_3 = \cos \beta_1 \cos \alpha_n \\ a_4 = \cos \gamma_3 \sin \beta_3 \cos \alpha_n - \sin \gamma_3 \sin \alpha_n \\ a_5 = \cos \gamma_3 \sin \alpha_n + \sin \gamma_3 \sin \beta_3 \cos \alpha_n \end{cases} \quad (2)$$

在局部坐标系 $O_i x_i y_i z_i$ 中,齿轮副在啮合力 F_{13} 和 F_{23} 作用下传递动力,各移动自由度方向的受力矢量 $\mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2$ 和 $\mathbf{F}^3$ 分别为

$$\begin{cases} \mathbf{F}^1 = \{a_3 F_{13} & a_2 F_{13} & a_1 F_{13}\}^T \\ \mathbf{F}^2 = \{-a_3 F_{23} & -a_2 F_{23} & -a_1 F_{23}\}^T \\ \mathbf{F}_1^3 = \{-F_{13} a_3 & F_{13} a_5 & -F_{13} a_4\}^T \\ \mathbf{F}_2^3 = \{F_{23} a_3 & -F_{23} a_5 & F_{23} a_4\}^T \end{cases} \quad (3)$$

式中 F_{13}, F_{23} 分别为齿轮 3 与齿轮 1、齿轮 2 的啮合力。 $F_{i3} = k_m^i(t) f(\delta_i) + c_m^i \dot{\delta}_i$, $(i=1, 2)$; 其中 $k_m^i(t) = k_m^i [1 + \varepsilon \sin(\Omega t)]$, k_m^i 为啮合刚度幅值, ε 为刚度系数, δ_i 为啮合传动齿轮间的相对位移, $\delta_i = u^i + u_i^3 - e_i(t)$, $e_i(t)$ 为齿轮传动综合误差, $e_i(t) = E \sin(\Omega t + \varphi)$, E 为综合误差幅值, Ω 为啮合频率, φ 为相位角, $f(\delta_i)$ 为分段间隙函数。

$$f(\delta_i) = \begin{cases} \delta_i - b_n & \delta_i > b_n \\ 0 & -b_n \leq \delta_i \leq b_n \\ \delta_i + b_n & \delta_i < -b_n \end{cases} \quad (4)$$

式中 b_n 为法向啮合侧隙的一半。

为便于方程组的化简,引入平移方向的位移矢量 $\boldsymbol{\zeta} = \{x, y, z\}^T$, 齿轮间的啮合力可视为内力, 根据平衡条件, 系统移动方向的自由度为 9, 振动微分方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\boldsymbol{\zeta}}_1 + c_1^1 \dot{\boldsymbol{\zeta}}_1 + k_1^1 \boldsymbol{\zeta}_1 + a_1^1 [c_m^1 \dot{\delta}_1 + k_m^1(t) f(\delta_1)] = 0 \\ m_2 \ddot{\boldsymbol{\zeta}}_2 + c_2^2 \dot{\boldsymbol{\zeta}}_2 + k_2^2 \boldsymbol{\zeta}_2 + a_2^2 [c_m^2 \dot{\delta}_2 + k_m^2(t) f(\delta_2)] = 0 \\ m_3 \ddot{\boldsymbol{\zeta}}_3 + c_3^3 \dot{\boldsymbol{\zeta}}_3 + k_3^3 \boldsymbol{\zeta}_3 + a_3^3 [c_m^1 \dot{\delta}_1 + k_m^1(t) f(\delta_1)] + \\ a_3^3 [c_m^2 \dot{\delta}_2 + k_m^2(t) f(\delta_2)] = 0 \end{cases} \quad (5)$$

同理可得,系统含 3 个扭转自由度,动力学方程为

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 = T_0 - F_x^1 r_1 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = T_0 + F_x^2 r_2 \\ J_3 \ddot{\theta}_3 = -T_1 - F_x^{13} r_3 + F_x^{23} r_3 \end{cases} \quad (6)$$

式中 $F_x^1, F_x^2, F_x^{13}, F_x^{23}$ 分别为啮合力在 x 自由度上的分力。

根据式(5)和式(6)知,系统的多自由度非线性动力学方程可统一表述为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} f\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (7)$$

式中

$$f\{\mathbf{q}\} = \left\{ \underbrace{x_1, y_1, z_1, \theta_1}_{g_1}, \underbrace{x_2, y_2, z_2, \theta_2}_{g_2}, \underbrace{x_3, y_3, z_3, \theta_3}_{g_3} \right\}^T$$

啮合齿轮在扭转方向上存在刚体位移,直接求解使得方程数值结果无法收敛,根据齿轮在扭转方向的振动位移,可计算啮合点法线处的相对位移 δ_1 和 δ_2 , 从而降低系统方程组的维数,由式(1)和式(2)可得相对位移的 2 阶微分方程为

$$\ddot{\delta}_1 + a_3 \ddot{x}_1 + a_2 \ddot{y}_1 + a_1 \ddot{z}_1 - a_3 r_4 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} - a_3 \ddot{x}_3 + a_5 \ddot{y}_3 - a_4 \ddot{z}_3 + a_3 r_3 \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t^2} = -\ddot{e}_1(t) \quad (8)$$

$$\ddot{\delta}_2 + a_3 \ddot{x}_2 + a_2 \ddot{y}_2 + a_1 \ddot{z}_2 + a_3 r_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} + a_3 \ddot{x}_3 - a_5 \ddot{y}_3 - a_4 \ddot{z}_3 - a_3 r_3 \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t^2} = -\ddot{e}_2(t) \quad (9)$$

消除刚体位移后,系统的总维数降为 11, 动力学方程写成矩阵形式为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} f(\mathbf{q}) = \mathbf{F} \quad (10)$$

式中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 1} & \mathbf{0}_{1 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & m_2 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 1} & \mathbf{0}_{1 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & m_3 & \mathbf{0}_{1 \times 1} & \mathbf{0}_{1 \times 1} \\ \boldsymbol{\alpha}_1 & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \boldsymbol{\alpha}_2 & 1 & \mathbf{0}_{1 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & a_3 & \boldsymbol{\alpha}_4 & \mathbf{0}_{1 \times 1} & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{K} =$$

$$\begin{bmatrix} k_1^1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & a_1^1 k_m^1(t) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_2^2 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & a_2^2 k_m^2(t) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & k_3^3 & a_3^3 k_m^1(t) & a_3^3 k_m^2(t) \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & a_3^2 k_m^1(t)/M_e & a_3^2 k_m^2(t)/M_3 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & a_3^2 k_m^1(t)/M_3 & a_3^2 k_m^2(t)/M_e \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{\xi} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{a}_1^{\xi} c_m^1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{c}_2^{\xi} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{a}_2^{\xi} c_m^2 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{c}_3^{\xi} & \mathbf{a}_3^{\xi} c_m^1 & \mathbf{a}'_3 c_m^2 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{a}_3^2 c_m^1 / M_e & \mathbf{a}_3^2 c_m^2 / M_3 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{a}_3^1 c_m^1 / M_3 & \mathbf{a}_3^2 c_m^2 / M_e \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中

$$\mathbf{m}_1 = \text{diag}\{m_1 \quad m_1 \quad m_1\}$$

$$\mathbf{m}_2 = \text{diag}\{m_2 \quad m_2 \quad m_2\}$$

$$\mathbf{m}_3 = \text{diag}\{m_3 \quad m_3 \quad m_3\}$$

$$\mathbf{a}_1 = \{a_2 \quad a_3 \quad a_1\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{-a_3 \quad a_5 \quad -a_4\}$$

$$\mathbf{a}_3 = \{-a_3 \quad -a_2 \quad a_1\}, \quad \mathbf{a}_4 = \{a_3 \quad -a_5 \quad a_4\}$$

$$\mathbf{k}_1^{\xi} = \text{diag}\{k_1^x \quad k_1^y \quad k_1^z\}, \quad \mathbf{k}_2^{\xi} = \text{diag}\{k_2^x \quad k_2^y \quad k_2^z\}$$

$$\mathbf{k}_3^{\xi} = \text{diag}\{k_3^x \quad k_3^y \quad k_3^z\}, \quad \mathbf{c}_1^{\xi} = \text{diag}\{c_1^x \quad c_1^y \quad c_1^z\}$$

$$\mathbf{c}_2^{\xi} = \text{diag}\{c_2^x \quad c_2^y \quad c_2^z\}, \quad \mathbf{c}_3^{\xi} = \text{diag}\{c_3^x \quad c_3^y \quad c_3^z\}$$

$$\mathbf{a}'_1 = \{-a_2 \quad -a_3 \quad -a_1\}^T$$

$$\mathbf{a}_2^{\xi} = \{a_3 \quad a_2 \quad -a_1\}^T$$

$$\mathbf{a}_3^{\xi} = \{a_3 \quad -a_5 \quad a_4\}^T$$

$$\mathbf{a}'_3 = \{-a_3 \quad a_5 \quad a_4\}^T$$

$$M_i = \frac{J_i}{r_i^2}, \quad M_e = \frac{J_2 J_3}{J_2 r_3^2 + J_3 r_2^2}$$

$$c_m^i = 2\xi_i \sqrt{k_m^i M_e} \quad (i = 1, 2)$$

式中 ξ_i 为啮合阻尼比; $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$ 分别为系统相应的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵; M_i 为各齿轮等效质量; M_e 表示啮合齿对的等效质量。

在数值计算时若动力学方程系数间数量级相差过大, 方程易产生病态问题, 对解的质量产生影响。引入位移标称尺度 b'_n 和时间标称尺度 ω_n 等参数对方程进行量纲一化处理。其他相关计算变

量为: $\omega_n = \sqrt{k_m^j \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_3} \right)}$, 量纲一时间 $\tau = \omega_n t$, 量纲一啮合频率 $\omega = \Omega / \omega_n$ 。

根据上述定义的时间和位移标度对方程进行量纲一化处理, 消除量纲的过程如下所示:

$$m_1 \omega_n^2 b'_n \frac{\partial^2 \hat{\xi}_1}{\partial \tau^2} + c_1^{\xi} \omega_n b'_n \frac{\partial \hat{\xi}_1}{\partial \tau} + k_1^{\xi} b'_n \hat{\xi}_1 + a_1^{\xi} [c_m^1 \omega_n b'_n \dot{\delta}_1 + k_m^1(t) b'_n \hat{f}(\delta_1)] = 0 \quad (14)$$

$$m_2 \omega_n^2 b'_n \frac{\partial^2 \hat{\xi}_2}{\partial \tau^2} + c_2^{\xi} \omega_n b'_n \frac{\partial \hat{\xi}_2}{\partial \tau} + k_2^{\xi} b'_n \hat{\xi}_2 + a_2^{\xi} [c_m^2 \omega_n b'_n \dot{\delta}_2 + k_m^2(t) b'_n \hat{f}(\delta_2)] = 0 \quad (15)$$

$$m_3 \omega_n^2 b'_n \frac{\partial^2 \hat{\xi}_3}{\partial \tau^2} + c_3^{\xi} \omega_n b'_n \frac{\partial \hat{\xi}_3}{\partial \tau} + k_3^{\xi} b'_n \hat{\xi}_3 + a_3^{\xi} [c_m^1 \omega_n b'_n \dot{\delta}_1 + k_m^1(t) b'_n \hat{f}(\delta_1)] + a_3^{\xi} [c_m^2 \omega_n b'_n \dot{\delta}_2 + k_m^2(t) b'_n \hat{f}(\delta_2)] = 0 \quad (16)$$

$$\ddot{\delta}_1 = -a_3 \ddot{X}_1 - a_2 \ddot{Y}_1 - a_1 \ddot{Z}_1 + a_3 \ddot{X}_3 - a_5 \ddot{Y}_3 + a_4 \ddot{Z}_3 - 2a_3^2 \xi_1 \dot{\delta}_1 - \frac{a_3^2 \hat{k}_1}{\omega_n^2 M_e} \hat{f}(\delta_1) - 2a_3^2 \xi_2 \dot{\delta}_2 - \frac{a_3^2 \hat{k}_2}{\omega_n^2 M_e} \hat{f}(\delta_2) + \frac{a_3 r_1 T_0}{\omega_n^2 J_1 b'_n} + \frac{a_3 r_3 T_1}{\omega_n^2 J_3 b'_n} - \frac{\ddot{e}_1(\tau)}{\omega_n} \quad (17)$$

$$\ddot{\delta}_2 = a_3 \ddot{X}_2 + a_2 \ddot{Y}_2 - a_1 \ddot{Z}_2 - a_3 \ddot{X}_3 + a_5 \ddot{Y}_3 + a_4 \ddot{Z}_3 - 2a_3^2 \xi_2 \dot{\delta}_2 - \frac{a_3^2 \hat{k}_2}{\omega_n^2 M_e} \hat{f}(\delta_2) - 2a_3^2 \xi_1 \dot{\delta}_1 - \frac{a_3^2 \hat{k}_1}{\omega_n^2 M_e} \hat{f}(\delta_1) + \frac{a_3 r_2 T_0}{\omega_n^2 J_2 b'_n} + \frac{a_3 r_3 T_1}{\omega_n^2 J_3 b'_n} - \frac{\ddot{e}_2(\tau)}{\omega_n} \quad (18)$$

式中相关变量定义如下:

$$\hat{k}_m^1(\tau) = k_m^1(t), \quad \hat{k}_m^2(\tau) = k_m^2(t), \quad \hat{c}_m^1 = c_m^1, \quad \hat{c}_m^2 = c_m^2, \quad \hat{\xi}(\tau) = \frac{\xi(t)}{b'_n},$$

$$\hat{\xi}(\tau) = \frac{\xi(t)}{\omega_n b'_n}, \quad \hat{\xi}(\tau) = \frac{\xi(t)}{\omega_n^2 b'_n}, \quad \hat{f}(\delta_i) = \frac{f(\delta_i)}{b'_n}, \quad \ddot{e}_i(\tau) = \frac{\ddot{e}_i(t)}{\omega_n^2 b'_n}$$

式中符号 $\wedge$ 为相应的量纲一变量。

将所求参数空间基于稳态域进行胞化, 设 Π 为 R^N 维动力学参数空间, 在 Poincaré 映射中, 初始值 x^0 在迭代一定周期后, 其相轨道分离小于给定量 $d_1 = 0.01$ 时为周期胞, 否则视为混沌胞。对于周期域内的参数胞, 当某一胞 μ_j 经过有限步映射仍收敛到相同周期域上(精度为 0.0001), 视为

同一周期胞^[14-16]。若某一胞的稳态结果偏离所属映射域外且较远时, 则断定为“陷胞”。

参数胞在 Poincaré 截面上的映射过程如下:

$$u(n+1) = C^i[u(n), \mu_j] \quad (19)$$

式中 $u(n)$ 为第 n 次映射后的状态, C^i 为映射关系函数, μ_j 第 j 个参数矢量。

在 $N=2$ 维域界平面中, 动力学参数域 Σ 反

映了系统的稳态响应,域界构成主要为
周期域 Σ_p

$$\Sigma_p = \bigcup_{j=1}^n \mu_j \quad (p = 1, 2, \cdots, m) \tag{20}$$

准周期域 Σ_q

$$\Sigma_q = \bigcup_{j=1}^n \mu_j \quad (q = 1, 2, \cdots, k) \tag{21}$$

当映射的周期数超过一定量($N=1\,500$)时,
参数胞仍未收敛到相应的轨道上,则该胞判为混
沌胞,混沌域为 Σ_c

$$\Sigma_c = \bigcup_{j=1}^n \mu_j \tag{22}$$

二维参数域平面 Σ

$$\Sigma = \bigcup_{p=1}^m \Sigma_p + \bigcup_{q=1}^k \Sigma_q + \Sigma_c \tag{23}$$

式中 n 为参数胞个数; m, k 为域界数目。

本文在 Wolf 原理基础上求解最大 Lyapunov
指数,首先在状态空间中取 t_0 时刻间隔为 $\delta(t_0)$
的两轨迹,在数值计算过程中,给一扰动量 f_0 ,经
时间 Δt 后初始 f_0 变为 f_{01} 。为保证计算不发生
溢出,在 f_{01} 的方向和长度基础上施加另一扰动
 f_1 ,同样在时间 Δt 后, f_1 将变为 f_{11} ,以此类推给
定扰动,经过 n 次迭代后,系统经历时间为 $n\Delta t$,
扰动量变为 f_n ,理论上 n 应取足够大的次数,则
系统最大 Lyapunov 指数 λ_1 可根据下式计
算^[17-18]:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta(t_0)\|} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\Delta t} \ln \left\{ \frac{\|f_{01}\|}{\|f_0\|} \frac{\|f_{11}\|}{\|f_1\|} \frac{\|f_{21}\|}{\|f_2\|} \cdots \frac{\|f_{n1}\|}{\|f_n\|} \right\} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=1}^n \ln \frac{\|f_{i1}\|}{\|f_i\|} \tag{24}$$

2 参数域界结构

某直升机,表 1 中给出了并车螺旋锥齿轮传
动部分动力学参数。

图 2 为系统随啮合频率变化的位移分岔图,
改变激励频率,系统经历多次周期与混沌振动,各
状态窗口交替出现。当 $\omega \in [1.46, 1.51]$ 和 $\omega \in$
 $[1.71, 1.90]$ 时,啮合位移均以倍周期分岔进入混
沌,分岔过程经历 1 周期、2 周期、3 周期、4 周
期, ..., 混沌。在 $\omega=1.19$ 处,分岔值出现了跳
跃式突变,从 1 周期运动直接进入混沌状态,由图 3
知,此处最大 Lyapunov 指数从 $\lambda_1 < 0$ 过渡到 $\lambda_1 >$
 0 并逐渐增大到 $\lambda_1=0.081$,表明系统的混沌状态
持续增强,不稳定性增大。由最大 Lyapunov 指

数图亦可以看出系统存在两个正值窗口,分别对
应着分岔图中的两个混沌区间。

表 1 并车齿轮传动主要动力学参数
Table1 Main parameters for the example geared system

参数	齿轮 g_1, g_2	齿轮 g_3
齿数	23	67
模数/mm	3	3
质量/kg	2.6	6.8
压力角/(°)	20	20
螺旋角/(°)	35	35
轴夹角/(°)	90	90
齿顶高系数	1	1
顶隙系数	0.25	0.25
节锥角/(°)	18.6	72.4
节锥长/mm	108	144
齿宽/mm	30	30
扭矩/(N·m)	188	799
转动惯量/(g·m ²)	18	42
支撑刚度/(MN/m)		208
支撑阻尼比		0.01
啮合刚度/(MN/m)		622
啮合阻尼比		0.01

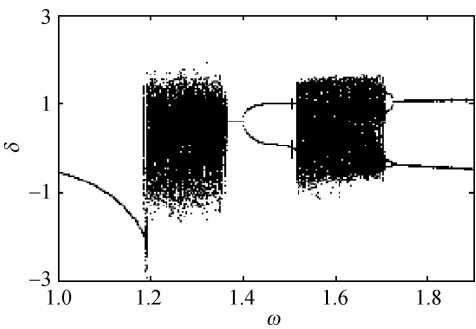


图 2 啮合频率 $\omega \in [1.0, 1.9]$ 分岔图
Fig.2 Bifurcation diagram with respect to
 $\omega \in [1.0, 1.9]$

2.1 间隙-阻尼比域界

量纲一间隙(b)和啮合阻尼比构成的二维参
数域平面: $b \times \xi \in [0.5, 0.8] \times [0.025, 0.225]$,
在域界平面内,每一维度方向取 26 个参数胞, d_i
和 d_0 分别为维度尺度,由 $l=(d_i-d_0)/n_c$ 知,间
隙胞和阻尼胞的大小 l 分别为 0.012 和 0.008。
以各胞的中心为初始值进行迭代计算,图 4 显示

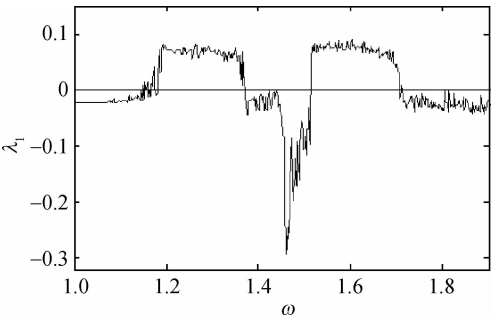


图 3 $\omega \in [1.0, 1.9]$ 时最大 Lyapunov 指数
Fig. 3 Largest Lyapunov exponent when $\omega \in [1.0, 1.9]$

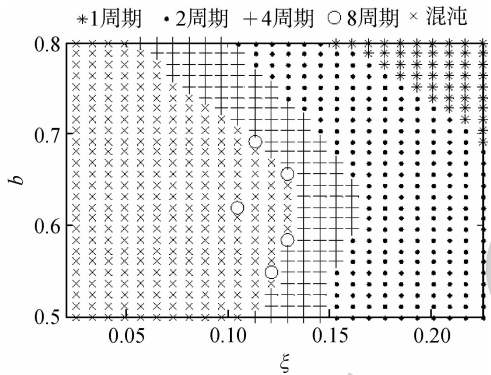


图 4 ξb 参数激励下的域界结构 ($\epsilon=0.12, E=0.32$)
Fig. 4 Dynamic domains under the excitation of ξb ($\epsilon=0.12, E=0.32$)

稳态域界由 5 个独立的动力学域组成, 分别为 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_4, \Sigma_8, \Sigma_c$, 在胞 $(0.105, 0.31)$ 处出现了一个孤立的陷胞远离 8 周期域, 夹杂于混沌胞中间, 未能准确反映系统的动态响应。随着阻尼比的增大系统从复杂的混沌域逐渐进入周期状态, 各周期胞组的吸引域彼此独立, 其演化过程与倍周期分岔行为相一致。其中少量 8 周期稳态胞镶嵌于 4 周期和混沌域边界处, 位于 $\xi=0.13$ 附近, 可以看出过渡区域较为短暂, 且在该边界域周围易出现多个吸引子共存的现象, 动力学特性较为复杂, 属于非规则区。分别取 $\xi=\{0.21, 0.11, 0.085, 0.03\}$ 时做系统的相图和 Poincaré 截面分别如图 5 和图 6 所示, 图中 $\xi=\{0.21, 0.11, 0.085\}$ 时解为周期响应, 相图为封闭轨线, $\xi=0.03$ 时为混沌振动, 相轨线相互层叠聚集不封闭, 在相平面内不断缠绕。从图 6(d) 中庞加莱映射点集为奇怪吸引子呈现分型特征, 符合混沌运动的特性。

2.2 误差-阻尼比域界

取参数平面 $E \times \xi \in [0.25, 0.40] \times [0.025, 0.225]$, 由图 7 可知稳态解的结构同图 4 未发生

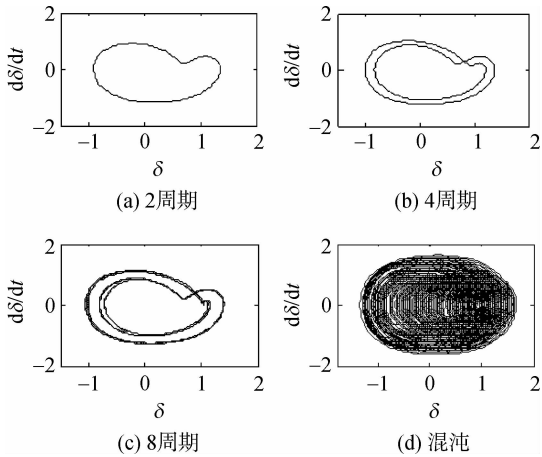


图 5 ξb 参数域的相图

Fig. 5 Phase portrait with the excitation of ξb

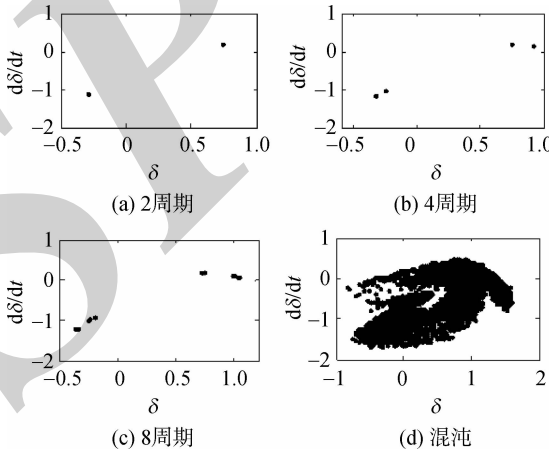


图 6 ξb 参数域的 Poincaré 截面

Fig. 6 Poincaré section with the excitation of ξb

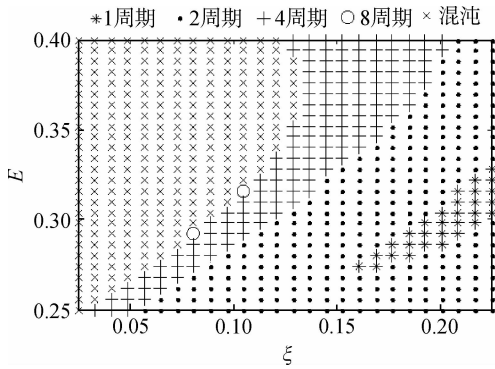


图 7 ξE 参数激励下的域界结构
($\epsilon=0.12, b=0.70$)

Fig. 7 Dynamic domains under the excitation of ξE ($\epsilon=0.12, b=0.70$)

本质改变, 系统同样经历倍周期道路进入混沌, 只是各吸引域在形状上相比间隙与阻尼比激励时有所改变。随着误差 E 的增大, 4 周期胞域逐渐变

大,使得系统在较大的 ξ 范围内为 4 周期状态。在整个参数域平面内,阻尼比较小时混沌胞占据了较大的空间,当阻尼比增大后,系统逐渐进入周期状态,表明较大的阻尼比有利于齿轮避开复杂的混沌区间,同时求解出 2 个 8 周期胞在周期 4 与混沌域的交界处。图 8 为在域界平面内分别取 $E=\{0.26, 0.32, 0.36, 0.40\}$ 时,采用公式(24)计算的系统随 ξ 的 Lyapunov 指数,LE 分布图亦表明随着 E 的增大,混沌域逐渐扩大周期域逐渐减小,LE 与 $\lambda_1=0$ 轴交点不断向右移动。对图 8 中稳态结果进行 FFT 分析,频谱图如图 9 所示,可以看出混沌状态时为大量紧密排列频谱,振动成分较为丰富。

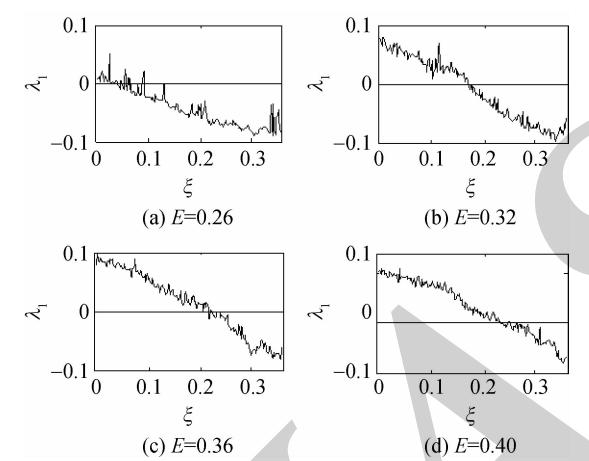


图 8 ξE 参数域的最大 Lyapunov 指数
Fig. 8 Largest Lyapunov Exponent in ξE domain

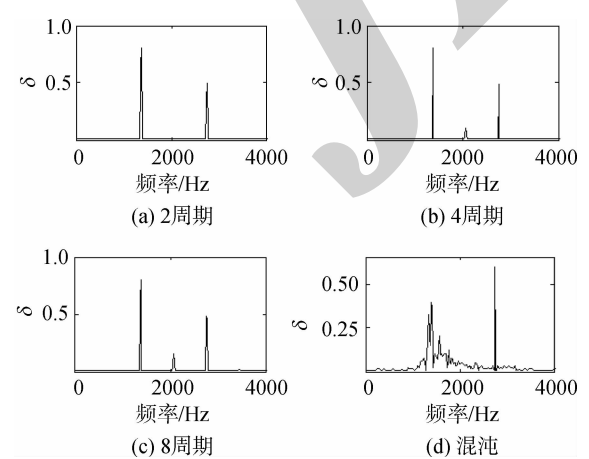


图 9 ξE 参数域的 FFT 频谱
Fig. 9 FFT spectra analysis in ξE domain

2.3 刚度-误差域界

参数域平面取 $E \times \epsilon \in [0.3, 1.6] \times [0.05, 0.4]$,图 10 显示系统解空间中存在 3 组不同的振

动域,分别为 $\Sigma_1, \Sigma_4, \Sigma_c$, 4 周期胞组 Σ_4 整体内嵌于混沌域中,两者之间并未出现其他激励胞。图 11 为 $E-\epsilon$ 参数域内周期胞。图 11(a)和图 11(c)中 $E=0.5$,图 11(b)和图 11(d)中 $E=1.2$,结合域界图知系统从 1 周期运动直接突变为混沌,转换过程中并未出现其他周期运动,当 E 进一步增大时接着出现 4 周期响应,直至最终完全变为混沌振动。上述过程与域界分布的预测结果对应良好,根据参数域平面周期运动只是混沌状态内部的小部区域,作用域具有有界性。通过映射参数胞间接的判断出了响应状态之间发生了跃迁式的突变,即在胞域边界处激励参数 E 的微小改变将导致相轨迹偏离而进入另一吸引域中,表明系统在误差域中某些特定值点的稳定性较差。

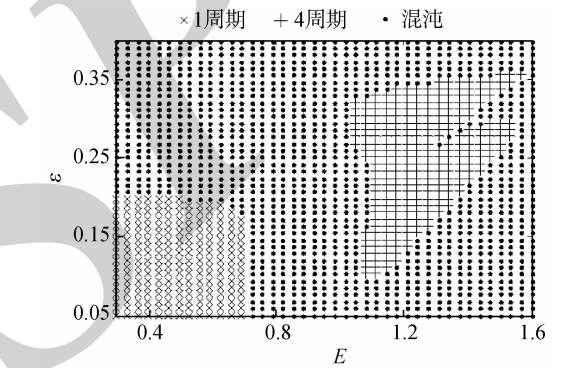


图 10 $E-\epsilon$ 参数激励下的域界结构($b=0.10, \xi=0.01$)
Fig. 10 Dynamic domains under the excitation of $E-\epsilon$ ($b=0.10, \xi=0.01$)

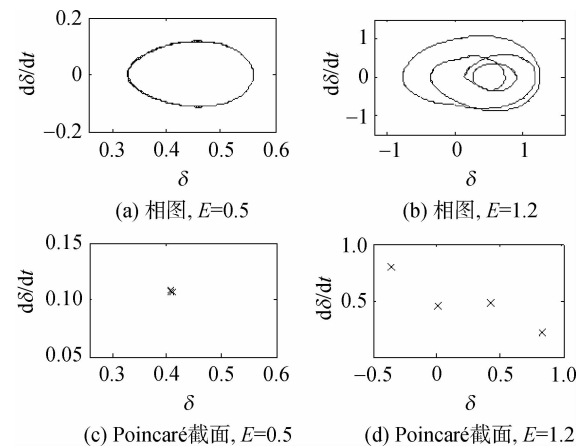


图 11 $E-\epsilon$ 参数域内周期胞
Fig. 11 Periodic cells analysis in $E-\epsilon$ domain

3 结 论

基于胞映射法求解了并车螺旋锥齿轮二维动力学参数域界结构,据此判断了多种参数激励下

系统的全局动力学性态。

1) 啮合频率 $\omega \in [1.0, 1.9]$ 时,系统在周期域与混沌域间交替变换,经历跳跃式分岔和倍周期分岔进入混沌,最大 Lyapunov 指数为 $\lambda_1 = 0.081$ 。

2) 在 $\xi b, \xi E$ 参数域平面内,系统具有相同的域界形态,均通过倍周期分岔道路进入混沌,在混沌域与周期域交界处,稳态特性较为复杂属于非规则区;在 εE 域平面内,系统存在一个封闭的4周期胞组内嵌于混沌域中,其边界处参数胞极其敏感,吸引子的稳定性较差。

3) 结合 Lyapunov 指数和位移分岔图等手段验证了胞映射法在齿轮动力学参数域界结构解中的有效性,二维参数域平面的域界结构为齿轮动力学参数设计和振动主动控制提供了参考依据。

参考文献:

- [1] KWON H S,KAHRAMAN A,LEE H K,et al. An automated design search for single and double-planet planetary gear sets[J]. Journal of Mechanical Design,2014,136(7): 1-13.
- [2] ERITENEL T,PARKER R G. An investigation of tooth mesh nonlinearity and partial contact loss in gear pairs using a lumped-parameter model[J]. Mechanism and Machine Theory,2012,56(1):28-51.
- [3] FARSHIDIANFAR A,SAGHAFI A. Global bifurcation and chaos analysis in nonlinear vibration of spur gear systems[J]. Nonlinear Dynamics,2013,75(4):783-806.
- [4] 孙智明,沈允文,李素有. 封闭行星齿轮传动系统的扭振特性研究[J]. 航空动力学报,2001,16(2):163-166.
- SUN Zhimin,SHEN Yunwen,LI Suyou. A study on torsional vibration in an encased differential gear train[J]. Journal of Aerospace Power,2001,16(2):163-166. (in Chinese)
- [5] SUN J Q,HSU C S. Global analysis of nonlinear dynamical systems with fuzzy uncertainties by the cell mapping method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1990,83(2):109-120.
- [6] 唐进元,熊思波,陈思雨. 基于图胞映射方法的单自由度非线性齿轮系统全局特性分析[J]. 机械工程学报,2011,47(5):59-65.
- TANG Jinyuan,XIONG Xingbo,CHEN Siyu. Analysis of global character of single degree of freedom nonlinear gear system based on digraph cell mapping method[J]. Journal of Mechanical Engineering,2011,47(5):59-65. (in Chinese)
- [7] 刘宏,王三民,刘海霞. 弹性支承下弧齿锥齿轮系统参数平面中的域界结构研究[J]. 振动与冲击,2010,29(12):173-176.
- LIU Hong,WANG Sanmin,LIU Haixia. Domain boundary structure in parameter plane of a spiral bevel gear system with elastic supports[J]. Journal of Vibration and Shock,2010,29(12):173-176. (in Chinese)
- [8] 刘梦军,沈允文,董海军. 齿轮系统参数对全局特性影响的研究[J]. 机械工程学报,2004,40(11):58-63.
- LIU Mengjun,SHEN Yunwen,DONG Haijun. Research on the affection of the gear system parameters on the global character[J]. Journal of Mechanical Engineering,2004,40(11):58-63. (in Chinese)
- [9] FARSHIDIANFAR A,SAGHAFI A. Bifurcation and chaos prediction in nonlinear gear systems[J]. Shock and Vibration,2014,79(3):1-8.
- [10] GOU Xiangfeng,ZHU Lingyun,CHEN Dailin. Bifurcation and chaos analysis of spur gear pair in two-parameter plane[J]. Nonlinear Dynamics,2015,79(3):2225-2235.
- [11] 贺群,徐伟,方同,等. Duffing 系统随机分岔的全局分析[J]. 力学学报,2003,35(4):452-460.
- HE Qun,XU Wei,FANG Tong,et al. Global analysis of stochastic bifurcation for doffing systems[J]. Acta Mechanica Sinica,2003,35(4):452-460. (in Chinese)
- [12] LING Hong,SUN Jianqiao. Bifurcations of fuzzy nonlinear dynamical systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2006,11(1):1-12.
- [13] GUO Y,PARKER R G. Dynamic analysis of planetary gears with bearing clearance[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics,2012,7(4):614-620.
- [14] PARKER R G,WU X H. Vibration modes of planetary gears with unequally spaced planets and an elastic ring gear[J]. Journal of Sound and Vibration,2010,329(11):2265-2275.
- [15] Celso G,Edward O,James A. et al. Sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos[J]. Physica D:Nonlinear Phenomena,1983,7(1):181-200.
- [16] GE Z M,LEE S C. A modified interpolated cell mapping method[J]. Journal of Sound and Vibration,1997,199(2):189-206.
- [17] WOLF A,SWIFT J B,SWINNEY H L,et al. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena,1985,16(3):285-317.
- [18] CHANG-JIAN C W. Bifurcation and chaos of gear-rotor-bearing system lubricated with couple-stress fluid[J]. Nonlinear Dynamics,2015,79(1):749-763.

(编辑:叶青)